基于微分几何与李群的无人机编队会合方法*

李 杰[1],彭双春[2],安宏雷[1],相晓嘉[1],沈林成[1]
(1. 国防科技大学 机电工程与自动化学院,湖南 长沙 410073;
2. 国防科技大学 航天科学与工程学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:在领航-跟随编队模式下,设计了一种基于追绳策略的无人机编队会合方法。基于微分几何曲线论和弗雷涅-塞雷标架建立了无人机非解耦三维运动模型,其中将曲率和挠率作为控制量;结合该模型给出了无人机三维编队会合问题的数学描述,它将导弹制导问题中的终端落角约束映射为编队会合问题中僚机的航迹倾角约束,同时引入额外的航迹方位角约束;使用特殊正交群的元素来度量长僚机方向偏差,并通过局部坐标映射将其映射为对应李代数空间中的旋量;基于该旋量设计了编队会合几何导引律,并给出相应的曲率和挠率控制指令;分别在长机稳定平飞和转弯机动条件下进行了多机编队会合数字仿真实验,仿真结果显示僚机能够有效地跟踪长机航向并收敛至指定位形,说明了方法的有效性。

关键词: 无人机;编队会合;微分几何;李群;几何控制
中图分类号:V279 **文献标志码**:A **文章编号**:1001-2486(2013)06-0157-08

UAVs formation rendezvous method based on differential geometry and Lie group

LI Jie[1], *PENG Shuangchun*[2], *AN Honglei*[1], *XIANG Xiaojia*[1], *SHEN Lincheng*[1]
(1. College of Mechatronic Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;
2. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: With the leader-follower formation pattern, a method for UAV formation rendezvous was developed based on the pursuit strategy. Firstly, the UAV non-decoupling 3D kinematics models were established by using the curve theory of differential geometry and the Frenet-Serret frames, where the curvature and the torsion were considered as the control effort. Secondly, the mathematical descriptions of the three-dimensional formation rendezvous were provided with the models, where the impact angular constraint in missile guidance was mapped to a flight path angle of the follower in formation rendezvous, and an additional azimuth angular constraint was introduced. Thirdly, the orientation deviation between the leader and the follower was measured by using an element of the special orthogonal group, and the element was mapped to a twist in an Lie algebra space corresponding to the Lie group by local coordinate mapping. Then, a geometric guidance law for formation rendezvous was developed by using the twist, and the corresponding curvature command and torsion command were presented. Finally, the numerical simulation for multi-UAVs formation rendezvous was carried out, under the leader flying straightly and making a turn, respectively. The simulation results show that the follower can track the orientation of the leader successfully and can converge to a specified configuration, which indicates that the proposed method is available.

Key words: unmanned aerial vehicle; formation rendezvous; differential geometry; Lie group; geometric control

相对于有人机,无人机(UAV)凭借其更大的载荷能力、更高的机动性能、更远的航程以及更低廉的造价,在军事与民用领域得到越来越广泛的使用。人们在不断提升无人机自主能力的同时,也在不断拓展其应用领域和使用方式。近年来,多架无人机协同执行任务成为无人机发展的重要方向[1]。其中,无人机自主编队技术是多无人机协同的基础,常用于编队飞行、护航和空中加油等任务[2]。无人机编队技术,从编队模式来划分,包括领航-跟随(leader-follower)[3-4]、虚拟结构(virtual structure)[5-6]、基于行为(behavior-based)[7-8]等模式。在领航-跟随模式中,指定编队中某一架无人机为长机,其余为僚机。其基本思想是将编队控制问题转化为僚机跟踪长机位置与方向或者长机轨迹问题;虚拟结构的基本思想是将编队看作一个刚性的虚拟结构,每个智能体是虚拟结构上相对位置固定的一点,当编队移动时,智能体跟踪对应刚体固定点的运动即可;基

* 收稿日期:2013-03-14
基金项目:湖南省研究生科研创新资助项目(CX2010B011)
作者简介:李杰(1984—),男,湖南娄底人,博士研究生,E-mail:leonlee2009@163.com;
相晓嘉(通信作者),男,讲师,博士,E-mail:o_fantasy_o@163.com

于行为的方法则是赋予编队每个智能体聚集、群集等仿人或仿生行为,并基于这些行为设计对应的控制器。按编队过程来划分,包括编队构成、编队保持、队形变换等过程。编队构成是多无人机形成编队的过程,无人机系统必须以一种称为“会合”的机动飞行从其各自不同的初始状态迁移至指定位形。编队会合的目标一般被定义为会合至指定位形(事先确定)、协商位形(在线协商)或者收敛至公共位形(自然形成)[9-10]。

在领航-跟随模式下,实现编队会合的典型方法大致可以分为两类,轨迹跟踪方法[11-12]和基于追缉的方法[13-15]。两类方法之间的差异在于编队成员之间协同行为的层次。前者属于顶层规划方法,僚机根据长机的状态、运动趋势甚至意图规划一条路径同长机会合。该方法的优点是可以考虑时间、能耗、安全性等优化因素,不过实现该方法的主要障碍在于它们通常是计算复杂并且缺乏收敛性保障,主要受限于无人机机载处理能力[16];后者属于底层的制导与控制方法,受导弹制导问题启发,它将长机视为假想的拦截目标,僚机通过机间数据链或者实时传感器观测来获取长机状态,通常采用比例导引律来实现与长机的编队会合[13]。尽管基于追缉的会合方法不是最优的,但它是反应性方法,且具有可靠的收敛性。

本文结合微分几何和李群理论设计了一种新的基于追缉策略的领航-跟随编队会合方法。首先,不同于传统的横纵通道解耦模型(仅仅适用于侧滑角可忽略条件),我们采用微分几何曲线论和弗雷涅-塞雷标架建立无人机的非解耦三维运动模型,将运动轨迹的曲率和挠率作为控制量输入,适用于更广泛的无人机类型(尤其是先进的倾斜转弯高空高速、高机动无人机);结合该模型给出了无人机三维编队会合问题的数学描述,由于传统导弹制导方法不考虑终端角度约束或仅仅考虑终端落角约束,无法直接应用于无人机编队导引,为此,我们在将终端落角约束映射为僚机的航迹倾角约束基础之上,扩充了额外的航迹方位角约束,用它们来描述三维编队会合问题;接着,使用特殊正交群 SO(3)的群元素来表征长僚机间基线同长机运动方向矢量的角位形偏差,这种非线性流形上的表示是坐标无关的,避免了传统欧氏空间中坐标表示的复杂性和频繁的坐标变换;再通过旋转矩阵来参数化 SO(3),既避免了传统欧拉角(最小表示)的奇异性问题和易混淆问题(24种不同的欧拉角表示),也避免了单位四元数(非最小表示,SO(3)的双覆盖)所带来的符号二义性问题;不过旋转矩阵用9个实值参数表示三维姿态存在6个冗余,为了消除这些冗余,我们通过局部对数映射将角位形映射为对应李代数空间 so(3)中的元素,利用 so(3)同构于三维向量空间$\mathbb{R}^3$的性质,使用几何 PD 控制律来引导长僚机编队会合;最后通过仿真试验,验证了方法能够使得僚机有效地跟踪长机航向,并会合至指定位形。

1 无人机编队会合问题描述

1.1 基于弗雷涅-塞雷标架(Frenet-Serret, FS)的无人机运动建模

数学上,无人机的运动可以抽象为三维空间中的一条曲线 $\boldsymbol{r}(s)$,它是一个至少三次连续可微的映射 $\boldsymbol{r}:[0,\infty]\to\mathbb{R}^3$,并且满足正则条件:对于所有 $s\in[0,\infty]$,有 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}s\neq 0$[17]。正则条件意味着沿曲线移动的质点不能停止,这也恰恰是固定翼无人机飞行的基本要求。另外,可以在曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 上绑定一个随曲线移动而连续变化的标架,包括 FS 标架[18]、自然标架[19]等。本文采用 FS 标架,如图1所示。

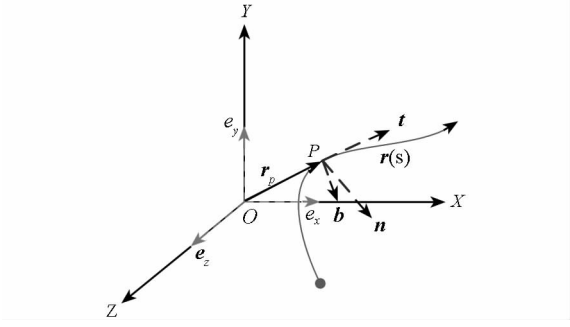


图1 三维空间曲线的弗雷涅·塞雷标架

Fig. 1 Frenet-Serret frame of a curve in three-dimensional space

FS 标架由正交三元组$\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\}$构成,其中 $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$,$\boldsymbol{b}$ 分别为 $\boldsymbol{r}(s)$ 的单位切矢、单位法矢和单位副法矢,它们共同构成一个右手系,满足

$$\boldsymbol{t}=\frac{\boldsymbol{r}'(s)}{|\boldsymbol{r}'(s)|} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)|} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t} \tag{3}$$

其中,符号“′”表示关于轨迹参数 s 的导数,且轨迹关于 s 的曲率 $\kappa(s)$ 和挠率 $\tau(s)$ 分别为

$$\kappa(s)=|\dot{\boldsymbol{r}}(s)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(s)| \tag{4}$$

$$\tau(s)=\frac{[\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)]\cdot\boldsymbol{r}'''(s)}{\kappa^2(s)} \tag{5}$$

根据微分几何曲线论,曲率和挠率是三维空间曲线的基本属性,它们完全确定一条空间曲线。

而对于二维空间而言,仅仅曲率就能够唯一地确定一条平面曲线。另外,前述关于曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的三次连续可微条件使得:对于所有 s,有 $\boldsymbol{r}''(s)\neq 0$,从而确保了 FS 标架的唯一性。除了几何意义,对于无人机的运动而言,FS 标架具有鲜明的物理意义:$\boldsymbol{t}$ 表征的是无人机的运动方向;分别作用在 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 上的曲率 $\kappa(s)$ 和挠率 $\tau(s)$ 完全地确定无人机的运动,其中 $\kappa(s)$ 比例于横向加速度,可以通过 $\boldsymbol{t}$ 的变化速率来测量,而 $\tau(s)$ 则比例于角动量,可以通过切平面的变化速率来测量。需要注意的是,FS 标架表征的仅仅是无人机的运动,而非无人机的姿态[20]。

为此,我们可以将 κ、τ 作为控制量,并根据下面弗雷涅 - 塞雷方程来控制无人机的运动。

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t)=v\boldsymbol{t}(t) \tag{6}$$

$$\dot{\boldsymbol{t}}(t)=v\kappa(t)\boldsymbol{n}(t) \tag{7}$$

$$\dot{\boldsymbol{n}}(t)=-v\kappa(t)\boldsymbol{t}(t)+v\tau(t)\boldsymbol{b}(t) \tag{8}$$

$$\dot{\boldsymbol{b}}(t)=-v\tau(t)\boldsymbol{n}(t) \tag{9}$$

其中,$v=\dot{s}=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ 表示无人机速度,$\kappa(t)$ 和 $\tau(t)$ 分别是关于时间 t 的曲率和挠率,

$$\kappa(t)=\frac{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)|}{|\dot{r}(t)|^3} \tag{10}$$

$$\tau(t)=\frac{(\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t))\cdot\dddot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t)|^2} \tag{11}$$

本文的目标就是要针对无人机编队会合问题,确定所需的曲率 $\kappa(t)$ 和挠率 $\tau(t)$。

1.2　无人机编队会合问题的数学描述

在领航 - 跟随编队模式下,通常的做法是预先指定僚机 i 与长机之间的指令编队间隔 d_x^i、指令编队距离 d_z^i 和指令编队高度差 d_y^i。为此,假定在指令会合位置 E_1、E_2 分别存在一架虚拟长机,它们具有与长机相同的速度矢量 $\boldsymbol{V}_e$,如图 2 所示。其中,$O\text{-}XYZ$ 表示平面地球坐标系,$E_i-X'Y'Z'$ 表示平移至虚拟长机质心的 $O-XYZ$,ψ 表示航迹方位角,φ 表示航迹倾角。

如果将当前长机(leader)的位置记为 (x_l,y_l,z_l),那么第 i 架虚拟长机(virtual leader)的位置为 $(x_{vl}^i,y_{vl}^i,z_{vl}^i)$,满足(12)式。

$$\begin{cases} z_{vl}^i=z_l-d_z^i\cos\psi+d_x^i\sin\psi \\ x_{vl}^i=x_l-d_z^i\sin\psi-d_x^i\cos\psi \\ y_{vl}^i=y_l-d_y^i \end{cases} \tag{12}$$

僚机通常采用同长机进行通信的方式或者直接利用机载传感器对长机进行观测来获取同长机之间的相对位置关系,从而实现编队会合。这里我们建立长僚机之间的三维编队会合的几何数学模型。为了简化分析,假设长机翼尖涡流对僚机的影响忽略不计,同样僚机所产生的涡流对长机的影响也忽略不计。图 3 给出了基于基线描述的会合问题几何关系,质点 E 表示虚拟长机,质点 P 表示僚机,$(\boldsymbol{t}_e,\boldsymbol{b}_e,\boldsymbol{n}_e)$、$(\boldsymbol{t}_p,\boldsymbol{b}_p,\boldsymbol{n}_p)$ 分别是描述长机和僚机运动的弗雷涅 - 塞雷标架。$\boldsymbol{V}_e$、$\boldsymbol{V}_p$ 分别表示虚拟长机和僚机速度矢量,满足

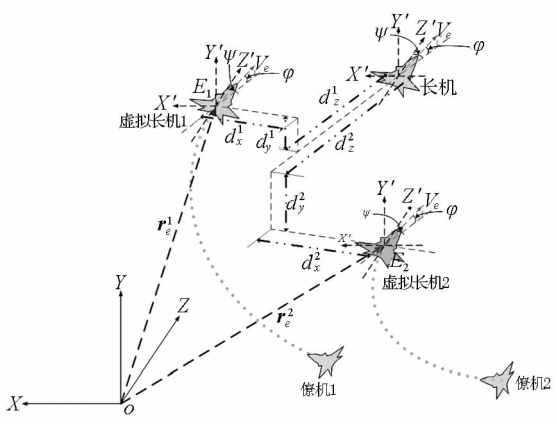


图 2　领航 - 跟随模式编队示意图

Fig. 2　Sketch map of leader-following formation

$$\boldsymbol{V}_e=v_e\boldsymbol{t}_e,\quad \boldsymbol{V}_p=v_p\boldsymbol{t}_p \tag{13}$$

其中,v_e、v_p 分别为 $\boldsymbol{V}_e$ 和 $\boldsymbol{V}_p$ 的幅值。

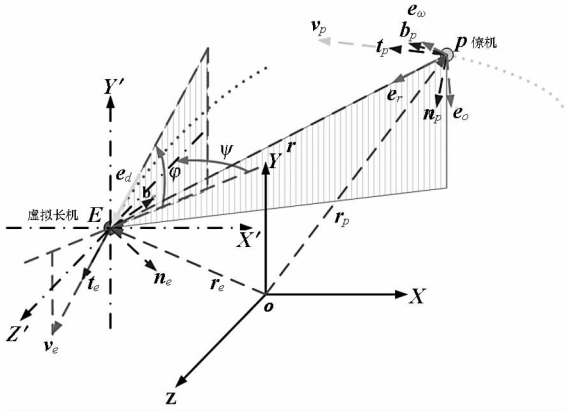


图 3　三维编队会合的几何描述

Fig. 3　Geometric description of three-dimensional formation rendezvous

在图 3 中,$\boldsymbol{r}$ 表示僚机指向虚拟长机的基线或视线矢量,满足

$$\boldsymbol{r}_e-\boldsymbol{r}_p=\boldsymbol{r} \tag{14}$$

其中,$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$,$\boldsymbol{e}_r$ 表示基线单位矢量,r 为基线长度。

对式(12)关于 t 求导,

$$v_e\boldsymbol{t}_e-v_p\boldsymbol{t}_p=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\boldsymbol{e}}_r \tag{15}$$

易知,基线单位矢量变化率满足

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_r \tag{16}$$

其中,$\boldsymbol{\omega}$ 表示基线旋转角速度,有 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{e}_\omega$,$\omega$ 为角速度大小,$\boldsymbol{e}_\omega$ 表征角速度矢量方向。

因此,我们可以得到用基线描述的无人机编队会合运动学方程

$$\nu_e \boldsymbol{t}_e - \nu_p \boldsymbol{t}_p = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_r \tag{17}$$

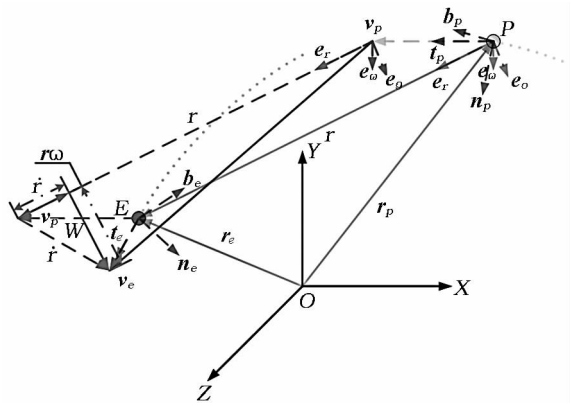


图 4　长僚机之间的基线运动

Fig. 4　Motion of baseline between the leader and the follower

图 4 给出了长僚机之间基线的运动关系。我们将基线变化矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 分别投影到基线矢量方向 $\boldsymbol{e}_r$ 和垂直基线方向 $\boldsymbol{e}_\omega \times \boldsymbol{e}_r \triangleq \boldsymbol{e}_o$ 上,得到基线长度变化率式(18)和基线垂直方向上的变化率式(19),

$$\dot{r} = (\nu_e \boldsymbol{t}_e - \nu_p \boldsymbol{t}_p) \cdot \boldsymbol{e}_r \tag{18}$$

$$r\omega = (\nu_e \boldsymbol{t}_e - \nu_p \boldsymbol{t}_p) \cdot \boldsymbol{e}_o \tag{19}$$

易知,$\boldsymbol{e}_\omega \cdot \boldsymbol{e}_r = 0$,$\dot{\boldsymbol{e}}_\omega \cdot \boldsymbol{e}_\omega = 0$,对式(15)关于 t 求导,并使用弗雷涅 - 塞雷方程式(6 - 9),我们得到无人机编队会合动力学方程:

$$\begin{aligned}\nu_e^2 \kappa_e \boldsymbol{n}_e - \nu_p^2 \kappa_p \boldsymbol{n}_p = {} & \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + 2\dot{r}\omega \boldsymbol{e}_\omega \times \boldsymbol{e}_r \\ & + r\dot{\omega} \times \boldsymbol{e}_r + r\omega^2 \boldsymbol{e}_\omega \times (\boldsymbol{e}_\omega \times \boldsymbol{e}_r)\end{aligned} \tag{20}$$

根据向量三重积 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ 和向量混合积 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$,可以分别得到 $\boldsymbol{e}_\omega \times (\boldsymbol{e}_\omega \times \boldsymbol{e}_r) = -\boldsymbol{e}_r$ 和 $(\dot{\omega} \times \boldsymbol{e}_r) \cdot \boldsymbol{e}_o = \dot{\omega} \cdot \boldsymbol{e}_\omega$。我们将动力学方程(20)分别投影到 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_o$ 上,得到:

$$(\nu_e^2 \kappa_e \boldsymbol{n}_e - \nu_p^2 \kappa_p \boldsymbol{n}_p) \cdot \boldsymbol{e}_r = \ddot{r} - r\omega^2 \tag{21}$$

$$(\nu_e^2 \kappa_e \boldsymbol{n}_e - \nu_p^2 \kappa_p \boldsymbol{n}_p) \cdot \boldsymbol{e}_o = 2\dot{r}\omega + r\dot{\omega} \cdot \boldsymbol{e}_\omega \tag{22}$$

2　基于 SO(3) 旋量的几何编队会合方法

编队会合的目标是僚机机动到指令编队会合位置,同时在指令编队会合位置具有与长机相同的运动方向和速度。常用于导弹制导的基于视线的制导律以引导导弹到拦截位置为目标,不考虑终端约束条件,无法用于编队会合问题[21];而具有终端约束的制导律通常考虑的是导弹的终端落角约束,在方位角上仍然存在自由度,也无法直接用来解决本文问题[22]。为此,我们考虑将上述落角约束映射为无人机航迹倾角约束的同时,引入额外的航迹方位角约束,它们共同构成编队会合矢量(等同于长机速度方向矢量);再使用 SO(3) 上的角位形来度量长僚机方向偏差;最后,借鉴基于 SO(3) 旋量的几何控制理论[23]来设计编队会合导引律。

2.1　三维编队会合几何导引律

如图 3 所示,我们将长机航迹方位角 ψ 和航迹倾角 φ 作为编队会合角度约束,它们共同确定一个同长机运动方向共线的编队会合方向矢量 $\boldsymbol{e}_d = [\cos\varphi\cos\psi, \cos\varphi\sin\psi, \sin\psi]^{\mathrm{T}}$,即 $\boldsymbol{e}_d = \boldsymbol{t}_e$ 基线矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 同 $\boldsymbol{e}_d$ 之间的方向偏差可用 $\mathrm{SO}(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3\times3} \mid RR^{\mathrm{T}} = I,\ \det(R) = +1\}$ 上的元素 R_{dr} 来度量[24],满足

$$\boldsymbol{e}_r = R_{dr}\boldsymbol{e}_d \tag{23}$$

显然,当 $\boldsymbol{e}_r$ 与 $\boldsymbol{e}_d$ 重合且指向一致时,有 $R_{dr} = I$。因为 SO(3) 是一个非线性流形,使用欧氏空间下的一般控制律直接控制角位形 R_{dr} 将带来精度损失[25]。为此,我们首先通过 SO(3) 上的对数映射 $\log: \mathrm{SO}(3) \to \mathrm{so}(3)$ 将 R_{dr} 映射为 SO(3) 的李代数空间 so(3) 中的元素 ω_{dr};再根据 so(3) 同构于 $\mathbb{R}^3$ 的特点,对 ω_{dr} 使用欧氏空间下传统 PD 导引律来设计编队会合导引律,即

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\lambda_1 \boldsymbol{\omega} - \lambda_2 \boldsymbol{\omega}_{dr},\quad \lambda_1 > 0,\quad \lambda_2 > 0 \tag{24}$$

其中,$\boldsymbol{\omega}$ 为基线角速度,如图 4 所示,基线变化矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 的垂直基线分量 $\boldsymbol{w}$ 满足

$$\boldsymbol{w} = \dot{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_r) - (\boldsymbol{e}_r \cdot \dot{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_r \times (\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{e}_r) \tag{25}$$

又有

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{26}$$

因此,$\boldsymbol{\omega}$ 满足

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2} \times \dot{\boldsymbol{r}} \tag{27}$$

而 $\boldsymbol{\omega}_{dr}$ 为对应于 R_{dr} 的 SO(3) 旋量(twist),满足

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{dr} = \log_{\mathrm{SO}(3)}(R_{dr}) \tag{28}$$

其中,假定 $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^{\mathrm{T}}$,那么有 $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$,对数映射 $\log_{\mathrm{SO}(3)}$ 满足

$$\begin{cases} \log_{\mathrm{SO}(3)}(R) = \dfrac{\phi}{2\sin\phi}(R - R^{\mathrm{T}}) \\ \cos\phi = \dfrac{1}{2}(\mathrm{tr}(R) - 1),\ |\phi| < \pi,\ \mathrm{tr}(R) \neq -1 \end{cases} \tag{29}$$

文献[26]的定理 4 已经证明 SO(3) 上的几何 PD 控制律式(24)可以从任意初始条件 $\mathrm{tr}(R_{dr}(0)) \neq -1$ 指数稳定到 $R_{dr} = I$,即

$$\begin{cases}\boldsymbol{\omega}\to 0\\ \boldsymbol{\omega}_{dr}\to 0\end{cases} \tag{30}$$

对于编队会合问题而言,该控制律确保了基线矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 收敛至编队会合方向 $\boldsymbol{e}_d$;因此,满足无人机的编队会合要求。接下来,我们将基于该控制律推导僚机机动的曲率和挠率指令。

2.2　僚机会合机动的曲率和挠率指令

如前所述,编队会合的基本目标是确保长僚机在会合时垂直基线方向无相对速度分量,因此我们控制的直接对象为 $\boldsymbol{e}_o$ 上的加速度分量方程(20)。为此,我们将 2.1 节设计的编队会合导引律代入式(20),并结合向量混合积,得到曲率指令为

$$\kappa_p=\frac{\nu_e^2\kappa_e\boldsymbol{n}_e\cdot\boldsymbol{e}_o}{\nu_p^2\boldsymbol{n}_p\cdot\boldsymbol{e}_o}-\frac{(2\dot r-\lambda_1 r)\omega}{\nu_p^2\boldsymbol{n}_p\cdot\boldsymbol{e}_o}-\frac{\lambda_2 r(\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{\omega}_{dr})\cdot\boldsymbol{e}_o}{\nu_p^2\boldsymbol{n}_p\cdot\boldsymbol{e}_o} \tag{31}$$

为了确保曲率指令非奇异[27],令

$$\boldsymbol{n}_p\cdot\boldsymbol{e}_o\equiv\boldsymbol{n}_p(0)\cdot\boldsymbol{e}_o(0)=\text{const}\neq 0 \tag{32}$$

对式(32)关于 t 求导,并使用弗雷涅 - 塞雷方程(8)以及方程(14),得到挠率指令

$$\tau_p=\frac{\kappa_p\boldsymbol{t}_p\cdot\boldsymbol{e}_o}{\boldsymbol{b}_p\cdot\boldsymbol{e}_o}-\frac{\boldsymbol{n}_p\cdot(\dot{\boldsymbol{e}}_\omega\times\boldsymbol{e}_r)}{\nu_p\boldsymbol{b}_p\cdot\boldsymbol{e}_o}+\omega\frac{\boldsymbol{n}_p\cdot\boldsymbol{e}_r}{\nu_p\boldsymbol{b}_p\cdot\boldsymbol{e}_o} \tag{33}$$

其中,$\boldsymbol{e}_\omega$ 和 $\dot{\boldsymbol{e}}_\omega$ 按照下列方式计算得到:首先,由方程(15),可知,

$$r\omega\boldsymbol{e}_\omega=(\nu_e\boldsymbol{t}_e-\nu_p\boldsymbol{t}_p)\times\boldsymbol{e}_r \tag{34}$$

因此,

$$\boldsymbol{e}_\omega=\frac{(\nu_e\boldsymbol{t}_e-\nu_p\boldsymbol{t}_p)\times\boldsymbol{e}_r}{r\omega} \tag{35}$$

接着,对式(34)关于 t 求导,得到

$$\dot r\omega\boldsymbol{e}_\omega+r\dot\omega\boldsymbol{e}_\omega+r\omega\dot{\boldsymbol{e}}_\omega=(\nu_e^2\kappa_e\boldsymbol{n}_e-\nu_p^2\kappa_p\boldsymbol{n}_p)\times\boldsymbol{e}_r+(\nu_e\boldsymbol{t}_e-\nu_p\boldsymbol{t}_p)\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_r) \tag{36}$$

最后,由上式和(15),得到

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\omega=\frac{(\nu_p\kappa_p\boldsymbol{n}_p-\nu_e\kappa_e\boldsymbol{n}_e)\times\boldsymbol{e}_r-(2\dot r\omega+r\dot\omega)\boldsymbol{e}_\omega}{r\omega} \tag{37}$$

同样,为了确保挠率指令非奇异[27],需要满足

$$0<r(0)\cdot\omega(0)<1 \tag{38}$$

综上所述,式(31)和式(33)分别为无人机编队会合的曲率和挠率指令。

3　仿真试验与结果分析

使用设计的方法对三架固定翼无人机的编队会合进行仿真,其中一架作为长机,另外两架为僚机。三架飞机的起始参数见表 1。

表 1　无人机编队会合起始参数

Tab. 1　Parameters at the beginning of UAV formation rendezvous

	长机	僚机 1	僚机 2
纬度(°)	29.45	29.3	29.4
经度(°)	94.5	94.4	94.2
高度(km)	4.57	5.48	3.66
速度(m/s)	170	200	200
航向角(°)	90.0	70.0	85.0

表 2 则给出了指令编队会合参数,即编队会合位形,其中,X 方向参数表示僚机沿垂直长机航向相对于长机的间隔(右为正);Z 方向参数表示僚机沿长机航向相对于长机的距离(后为正);Y 方向则表示僚机相对于长机的高度差(上为正)。

表 2　无人机编队会合终止参数(相对长机的位置)

Tab. 2　Parameters at the end of UAV formation rendezvous (position relative to the leader)

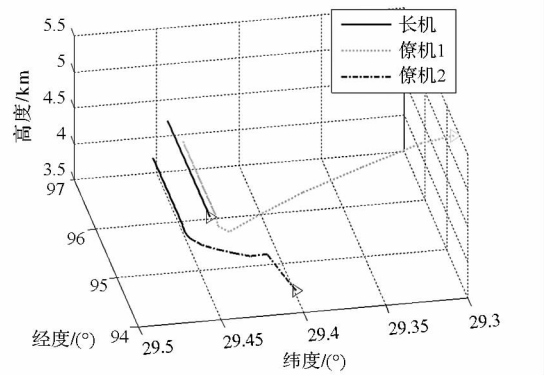
	僚机 1	僚机 2
X 方向间隔(km)	-1.0	1.0
Z 方向距离(km)	1.5	0.4
Y 方向高度差(km)	-0.3	-0.5

另外,曲率和挠率控制指令中的常值因子 λ_1、λ_2 分别选取为 4、2 $\frac{|\dot r|}{r}$。下面分别给出长机直线运动和长机曲线运动情形下的仿真结果。

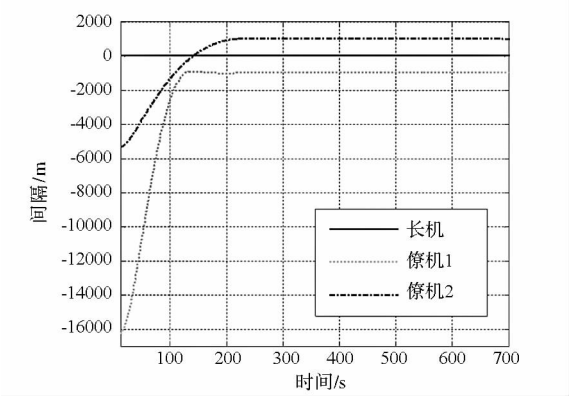
3.1　想定 1:长机稳定平飞

我们首先考虑长机稳定平飞情形。三维编队会合过程如图 5(a)所示。可以看出僚机 1 和僚机 2 均收敛至表 2 指定的编队会合位形。

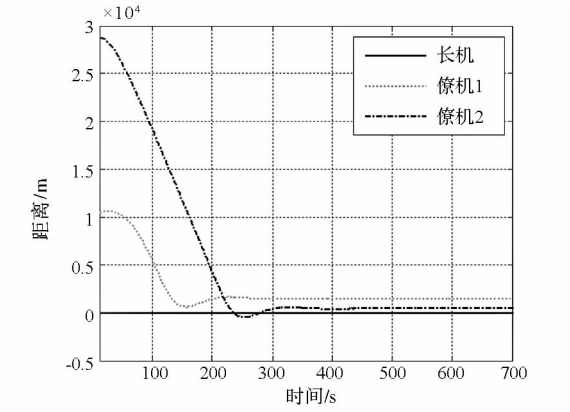
图 5(b) - (d)分别给出了僚机 1 和僚机 2 相对于长机的间隔、距离和高度差随时间的变化。从图 5(b)看出,僚机 1 相对于长机的间隔收敛至 -1000m;僚机 2 相对于长机的间隔收敛至 1000m。从图 5(c)看出,僚机 1 相对于长机的距



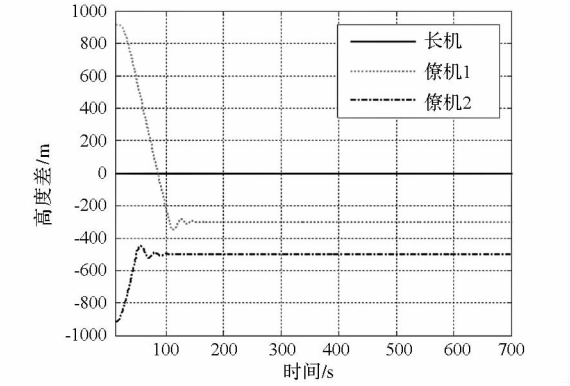
(a)三维编队会合过程("△"表示起始位置)



(b)X 方向间隔变化



(c)Z 方向距离变化



(d)Y 方向高度差变化

图5 三维编队会合过程以及长僚机间 X、Y、Z 方向的距离变化

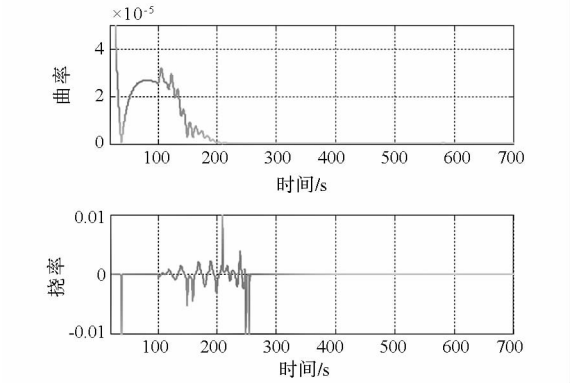
Fig. 5 The process of formation rendezvous and distance between the leader and the follower along X, Y, Z axis

离收敛至1500m;僚机2相对于长机的距离收敛至400m。从图5(d)看出,僚机1相对于长机的高度差收敛至-300m;僚机2相对于长机的高度差则收敛至-500m。

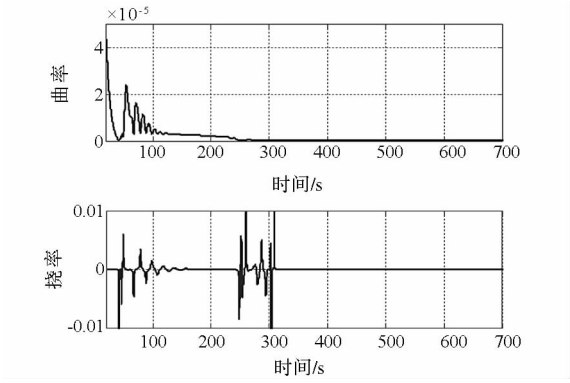
图6(a)、(b)分别给出了编队会合过程中僚机1和僚机2的曲率和挠率控制指令曲线。

3.2 想定2:长机转弯机动

在长僚机编队会合过程中,长机一般不会始终保持稳定平飞状态(除了空中加油任务),而是可能不断地变化航向、高度或者速度,为此,我们开展了长机转弯机动条件下的仿真试验。下面给出了一组仿真结果,想定为:无人机编队会合起始参数和终止参数分别见表1和表2,并在编队会合开始后170s指令长机由北偏东90°航向转弯机动至北偏东135°。



(a)僚机1的曲率和挠率控制指令



(b)僚机2的曲率和挠率控制指令

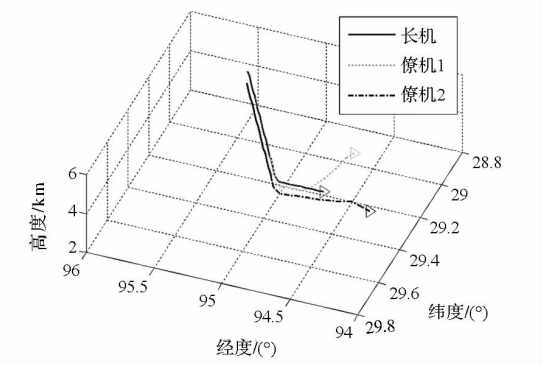
图6 编队会合过程中僚机1和僚机2的曲率、挠率控制指令

Fig. 6 Curvature and torsion control command of the follower 1 and the follower 2 in formation rendezvous

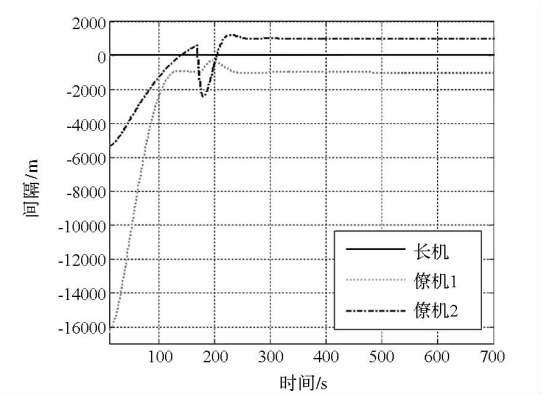
图7(a)显示了三维编队会合过程。图7(b)-(d)分别给出了僚机1和僚机2相对长机的间隔、距离和高度差变化。从图7(b)看出,在长机170s机动过程中,位于长机右侧的僚机1同长机的间隔明显减小,相反僚机2同长机的间隔则明显增加,而僚机1大约在250s时相对长机的间隔收敛至-1000m,僚机2大约在280s时相对长机的间隔收敛至1000m。从图7(c)看出,僚机1相对长机的距离收敛至1500m;僚机2则收敛至400m。从图7(d)看出,僚机1相对长机的高度差收敛至-300m,僚机2相对长机的高度差则收敛至-500m。图8(a)、(b)则给出了僚机1和僚机2的曲率和挠率控制指令曲线。

4 总结

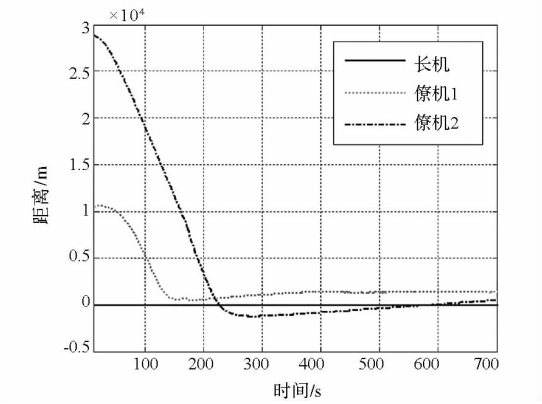
本文研究了领航-跟随编队模式下无人机三



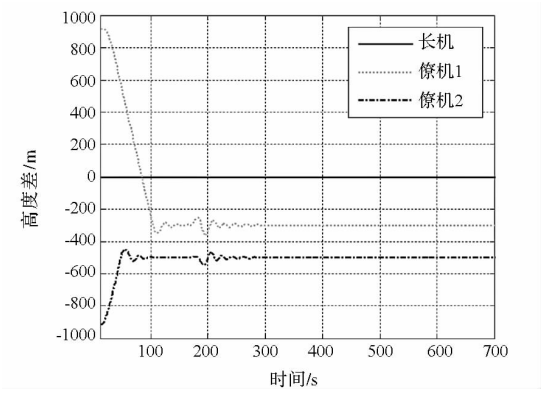
(a)三维编队会合过程("△"表示起始位置)



(b)X 方向间隔变化



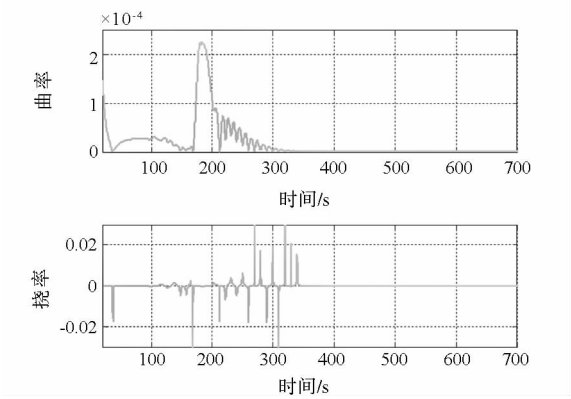
(c)Z 方向距离变化



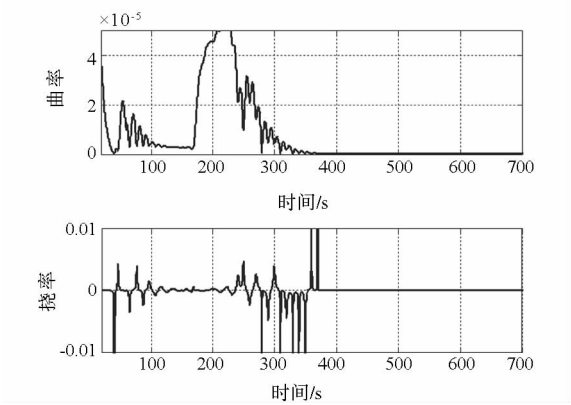
(d)Y 方向高度差变化

图 7　三维编队会合过程以及长僚机间 X、Y、Z 方向的距离变化

Fig. 7　The process of formation rendezvous and distance between the leader and the follower along X, Y, Z axis



(a)僚机 1 的曲率和挠率控制指令



(b)僚机 2 的曲率和挠率控制指令

图 8　编队会合过程中僚机 1 和僚机 2 的曲率、挠率控制指令

Fig. 8　Curvature and torsion control command of the follower 1 and the follower 2 in formation rendezvous

维编队会合问题。使用弗雷涅－塞雷标架对无人机运动进行建模；扩充带终端角度约束的导弹制导律并将其用来描述无人机编队会合问题；基于 SO(3)旋量，用李代数空间中的 PD 几何控制律来设计编队会合导引律，并推导出相应的曲率和挠率指令。目前方法仅仅适用于松散编队问题，在后续研究中，我们将考虑长僚机间的气动耦合，用终端约束来描述编队成员之间的安全避碰约束，并设计面向近距离紧密编队的会合、保持以及重构方法。

参考文献(References)

[1] Office of the Secretary of Defense. Unmanned aircraft systems roadmap 2005－2030[R]. DoD, Washington DC, 2005.

[2] 李广文，蒋正雄，贾秋玲. 分布式多无人机编队控制系统仿真[J]. 计算机仿真，2010，27(2)：101－103.
LI Guangwen, JIANG Zhengxiong, JIA Qiuling. Simulation of distributed formation control system for multiple UAVs[J]. Computer Simulation, 2010, 27(2): 101－103. (in Chinese)

[3] Naffin D J, Sukhatme G S. Negotiated formations[C]// Proceedings of the 8th Conference on Intelligent Autonomous Systems, Amsterdam, 2004: 181－190.

[4] Das A K, Fierro R, Kumar V, et al. A vision-based formation

control framework [J]. Robotics and Automation, IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2002, 18(5): 813 – 825.

[5] Lewis M A, Tan K H. High precision formation control of mobile robots using virtual structures[J]. Autonomous Robots, 1997, 4(4): 387 – 403.

[6] Ren W, Beard R W. Formation feedback control for multiple spacecraft via virtual structures [C]//Control Theory and Applications, IEE Proceedings. IET, 2004, 151(3): 357 – 368.

[7] Reynolds C W. Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model [C]//Proceedings of ACM SIGGRAPH Computer Graphics. ACM, 1987, 21(4): 25 – 34.

[8] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(6): 988 – 1001.

[9] Meyers R A. Mathematics of complexity and dynamical systems[M]. Springer, 2011.

[10] Bullo F, Cortés J, Martinez S. Distributed control of robotic networks: a mathematical approach to motion coordination algorithms[M]. Princeton University Press, 2009.

[11] McLain T W, Beard R W. Trajectory planning for coordinated rendezvous of unmanned air vehicles[C]//Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, 2000, 4369: 1 – 8.

[12] McLain T W, Chandler P R, Rasmussen S, et al. Cooperative control of UAV rendezvous [C]//American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001. IEEE, 2001, 3: 2309 – 2314.

[13] Blakelock J H. Automatic control of aircraft and missiles[M]. New York: Wiley, 1991.

[14] Belkhouche F, Belkhouche B. A pursuit rendezvous approach for robotic tracking [J]. Mobile Robots: Perception and Navigation, 2007.

[15] Kim B S, Lee J G, Han H S. Biased PNG law for impact with angular constraint[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1998, 34(1): 277 – 288.

[16] Smith A L. Proportional navigation with adaptive terminal guidance for aircraft rendezvous[J]. Journal of guidance, control, and dynamics, 2008, 31(6): 1832 – 1836.

[17] Tsourdos A, White B, Shanmugavel M. Cooperative path planning of unmanned aerial vehicles[M]. Wiley, 2010.

[18] Justh E W, Krishnaprasad P S. Natural frames and interacting particles in three dimensions [C]//Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on. IEEE, 2005: 2841 – 2846.

[19] Bishop R L. There is more than one way to frame a curve[J]. The American Mathematical Monthly, 1975, 82(3): 246 – 251.

[20] Justh E W, Krishnaprasad P S. A simple control law for UAV formation flying[R]. Institute for Systems Research Technical Report, 2002.

[21] Justh E W, Krishnaprasad P S. Steering laws for motion camouflage [J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science, 2006, 462 (2076): 3629 – 3643.

[22] Yoon M G. Relative circular navigation guidance for three-dimensional impact angle control problem [J]. Journal of Aerospace Engineering, 2010, 33(4): 300 – 308.

[23] Jurdjevic V. Geometric control theory [M]. Cambridge university press, 1996.

[24] Li Z, Sastry S S, Murray R M. A mathematical introduction to robotic manipulation[M]. Florida: CRC Press Inc, 1994.

[25] Iserles A, Munthe-Kaas H Z, N⌀rsett S P, et al. Lie-group methods[J]. Acta Numerica 2000, 2000, 9(1): 215 – 365.

[26] Bullo F, Murray R M. Proportional derivative (PD) control on the Euclidean group[R]. Caltech CDSTR, 1995.

[27] Chiou Y C, Kuo C Y. Geometric approach to three dimensional missile guidance problem [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(2): 335 – 341.