文章编号: 1001- 2486(2008) 03- 0001- 04

一种基于导航点的航天器相对运动轨迹生成策略*

朱彦伟, 杨乐平, 任仙海
(国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 针对圆(近圆)轨道航天器相对运动的固定时间状态转移问题, 提出了一种基于导航点的多脉冲优化轨迹生成策略。从相对运动动力学出发, 应用最优控制理论给出了基于连续推力的最优转移轨线, 将引入的导航点限定在最优转移轨线上得到其位置参数; 然后利用导航点位置参数建立了脉冲约束下的基于多脉冲的优化轨迹生成模型, 采用二次规划算法求解, 通过改变导航点位置和脉冲间隔优化轨迹。仿真算例验证了策略的有效性。

关键词: 相对运动; 最优控制; 脉冲机动; 轨迹生成; 二次规划
中图分类号: V448. 2 文献标识码: A

A Trajectory Generation Strategy Based on Way-points for Spacecraft Relative Motion

ZHU Yan-wei, YANG Le-ping, REN Xian-hai
(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: An optimal trajectory generation strategy based on way-points is presented to solve the fixed-time state transition for spacecraft relative motion in a circular orbit. According to the dynamics of relative motion, the optimal transfer trajectory with continuous thrust is investigated by applying optimal control theory. Furthermore, a set of way-points constrained to be along the optimal transfer trajectory are introduced to parameterize the trajectory with impulsive constraints by multi-impulse control. By changing the positions of way-points and the time between two neighboring impulsive burns, the generated trajectory is optimized with quadratic programming algorithm. The simulations show that the strategy is practical and efficient.

Key words: relative motion; optimal control; impulsive maneuver; trajectory generation; quadratic programming

近年来, 空间交会和编队飞行成为航天领域的两大热点问题, 而近距离相对运动是实现空间交会和近距离编队飞行所必需的。作为近距离相对运动的主要研究内容, 轨迹生成引起了越来越多研究人员的关注。

轨迹生成就是在各种约束条件下确定航天器的最优可行轨迹, 使其在给定的时间内到达期望的位置。文献中出现了很多轨迹生成方法[1]。其中, 通过引入导航点将轨迹优化问题转化为关于导航点的参数优化问题的方法成功解决了编队飞行重构中的轨迹生成问题[2-4]。本文从这一思想出发, 针对圆(近圆)轨道航天器相对运动的固定时间状态转移问题, 通过引入导航点给出了基于多脉冲控制的优化轨迹生成策略。首先, 依据圆(近圆)轨道相对动力学的特性, 利用最优控制理论给出了基于连续推力的最优轨线, 并把导航点限定在最优轨线上; 然后, 考虑到工程实用性, 采用多脉冲控制方法, 利用导航点参数建立轨迹生成模型, 通过对导航点位置和脉冲间隔的优化生成轨迹。

1 相对运动动力学

在参考航天器为圆(近圆)轨道的情况下, 航天器之间的近距离相对运动通常由 Hill 方程(C- W 方程)描述。取目标航天器为参考航天器, 建立相对运动坐标系(原点与参考航天器的质心固连并随其沿

* 收稿日期: 2007- 12- 24
基金项目: 国家 863 基金资助项目(2007AA704114)
作者简介: 朱彦伟(1981—), 男, 博士生。

轨道运动, x 轴与参考航天器的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 重合, 由地心指向参考航天器, y 轴在参考航天器的轨道面内与 x 轴垂直, 沿运动方向为正, z 轴垂直于轨道平面, 与 x、y 构成右手系), 忽略各种摄动的影响, 则 Hill 方程具有以下形式:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - 3\omega^2 x = a_x \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} = a_y \\ \ddot{z} + \omega^2 z = a_z \end{cases} \tag{1}$$

式中, ω 为参考航天器的平均角速度, a_x、a_y、a_z 为控制加速度。

令 $\boldsymbol{X} = [x \quad y \quad z \quad \dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{u} = [a_x \quad a_y \quad a_z]^{\mathrm{T}}$, 则

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{2}$$

式中,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

令 $\theta = \omega(t - t_0)$, $s = \sin\theta$, $c = \cos\theta$, 则方程(2)的状态转移矩阵为:

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &= \Phi(t - t_0) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t - t_0)} \\ &= \begin{bmatrix} 4 - 3c & 0 & 0 & s/\omega & 2(1-c)/\omega & 0 \\ 6(s - \theta) & 1 & 0 & 2(c-1)/\omega & (4s - 3\theta)/\omega & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & s/\omega \\ 3\omega s & 0 & 0 & c & 2s & 0 \\ 6\omega(c-1) & 0 & 0 & -2s & 4c - 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega s & 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{rr} & \Phi_{rv} \\ \Phi_{vr} & \Phi_{vv} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

记 $\boldsymbol{r} = [x \quad y \quad z]^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{v} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^{\mathrm{T}}$, t_0 时刻的位置速度矢量分别为 $\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{v}_0$, 则 t 时刻($\Delta t = t - t_0$)的位置速度矢量为

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = \Phi_{rr}(\Delta t)\boldsymbol{r}_0 + \Phi_{rv}(\Delta t)\boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{v} = \Phi_{vr}(\Delta t)\boldsymbol{r}_0 + \Phi_{vv}(\Delta t)\boldsymbol{v}_0 \end{cases} \tag{5}$$

2 导航点位置确定

利用最优控制原理确定导航点的位置。设计导航点处在最优轨线上, 最优轨线通过最优控制模型得到。追踪航天器在给定的时间内从初始状态 $\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{v}_0$ 运行到期望状态 $\boldsymbol{r}_f$、$\boldsymbol{v}_f$, 能耗最优, 最优控制模型如下:

$$\begin{cases} \min J = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\tau = \dfrac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)\,\mathrm{d}\tau \\ \text{s.t. } \dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \end{cases} \tag{6}$$

初始条件 $\boldsymbol{X}_0 = [x_0 \quad y_0 \quad z_0 \quad \dot{x}_0 \quad \dot{y}_0 \quad \dot{z}_0]^{\mathrm{T}}$, 终端约束 $\boldsymbol{X}_f = [x_f \quad y_f \quad z_f \quad \dot{x}_f \quad \dot{y}_f \quad \dot{z}_f]^{\mathrm{T}} = \Psi$。

上述模型属于最小积分平方控制(Minimum Integral Square Control)问题, 最优控制解[5]为:

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{Q}^{-1}(t)[\Psi - \hat{\Psi}(t)] \tag{7}$$

式中, $\boldsymbol{R}(t)$ 称为状态转移矩阵的伴随矩阵, 也叫"制导矩阵", $\boldsymbol{R}(t) = \Phi^{\mathrm{T}}(t_f - t)$; $\hat{\Psi}(t) = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}(t)$, 为没有施加控制的状态估计值; $\boldsymbol{Q}(t) = \displaystyle\int_{t_f}^{t} \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(t)\,\mathrm{d}t$, $\boldsymbol{Q}(t_f) = 0$, $\boldsymbol{Q}(t) = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(t)$。

最优性能指标为

$$J_{\min} = -\frac{1}{2}(\Psi - \hat{\Psi}_0)^{\mathrm{T}} Q_0^{-1}(\Psi - \hat{\Psi}_0) \tag{8}$$

联立式(2)、(7), 由数值积分可以得到最优轨线 $x^*(t)$。实际上, 最优轨线使得整个轨线上的 ΔV

的平方和的平方根 RSS 最小, 即

$$RSS = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{v}_i} \tag{9}$$

导航点位置可通过 $t_0 \sim t_f$ 之间的任意时刻 t_p 表征为 $\boldsymbol{x}^*(t_p)$。

3 多脉冲优化轨迹生成模型

由于连续推力控制在工程上难以实现, 所以考虑采用 N 次脉冲机动实现。在初始位置、终端位置和导航点处施加脉冲, 导航点在最优轨线 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 上可变, 整个机动过程时间固定, 称之为固定时间状态转移。为简化问题描述, 将初始位置和终端位置看作固定导航点, 将导航点称为自由导航点, 这样共有 N 个导航点。令 $b = N - 1$, 引入两组时间变量 Δt_{pi}、$\Delta t_i (i = 1, \cdots, b)$, Δt_{pi} 表示相邻导航点的时间间隔, 用于确定自由导航点的位置, 第 k 个导航点的位置表示如下:

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_0, \quad \boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{x}^*\left(\sum_{i=1}^{k-1} \Delta t_{pi}\right), \quad k = 2, \cdots, b, \quad \boldsymbol{r}_N = \boldsymbol{r}_f \tag{10}$$

Δt_i 表示第 i 次脉冲与下一次脉冲的时间间隔, 每次脉冲的速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}_i$ 可计算[7] 如下:

若脉冲前后的速度分别为 $\boldsymbol{v}_i^-$、$\boldsymbol{v}_i^+$, 则由式(5)可得

$$\boldsymbol{v}_i^- = \Phi_{rv}(\Delta t_{i-1}) \cdot \boldsymbol{r}_{i-1} + \Phi_{vv}(\Delta t_{i-1}) \boldsymbol{v}_{i-1}^+, \quad i = 2, \cdots, N \tag{11}$$

$$\boldsymbol{v}_i^+ = \Phi_{rv}^{-1}(\Delta t_i) \cdot \left[\boldsymbol{r}_{i+1} - \Phi_{rr}(\Delta t_i) \cdot \boldsymbol{r}_i\right], \quad i = 1, 2, \cdots, b \tag{12}$$

式中,

$$\Phi_{rv}^{-1}(\Delta t_i) = \begin{bmatrix} \dfrac{\omega(3\alpha - 4\sin\alpha)}{-8 + 8\cos\alpha + 3\alpha\sin\alpha} & \dfrac{-2\omega(\cos\alpha - 1)}{-8 + 8\cos\alpha + 3\alpha\sin\alpha} & 0 \\ \dfrac{2\omega(\cos\alpha - 1)}{-8 + 8\cos\alpha + 3\alpha\sin\alpha} & \dfrac{-\omega\sin\alpha}{-8 + 8\cos\alpha + 3\alpha\sin\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\omega}{\sin\alpha} \end{bmatrix}, \quad \alpha = \omega \Delta t_i \tag{13}$$

记 $\boldsymbol{v}_1^- = \boldsymbol{v}_0$、$\boldsymbol{v}_N^+ = \boldsymbol{v}_f$, 则

$$\Delta \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i^+ - \boldsymbol{v}_i^-, \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{14}$$

整个机动过程所需的脉冲速度增量为

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{N} |\Delta \boldsymbol{v}_i|$$

很明显, ΔV 是关于 Δt_{pi}、Δt_i 的函数, 可以对脉冲位置和脉冲间隔进行优化。为了与最优控制中的优化一致, 选择所有脉冲的 RSS 为优化指标, 其目的是使所有脉冲尽可能相等。于是多脉冲轨迹优化问题可描述如下:

决策变量: $\boldsymbol{Y} = \left[\Delta t_{p1} \quad \cdots \quad \Delta t_{pb} \quad \Delta t_1 \quad \cdots \quad \Delta t_b\right]^{\mathrm{T}}$, 共有 $m = 2b$ 个决策变量。

优化模型:

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{Y} \in \mathbf{R}^m} J = F(\boldsymbol{Y}) = RSS = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N} \Delta \boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{v}_i} \\ \text{s.t} \quad \sum\limits_{i=1}^{b} \boldsymbol{Y}(i) = \Delta t, \quad \sum\limits_{i=b+1}^{2b} \boldsymbol{Y}(i) = \Delta t \\ \boldsymbol{Y}(i) \geqslant 0, \quad i = 1, \cdots, 2b \\ |\Delta \boldsymbol{v}_i| \leqslant \Delta v_{\max}, \quad i = 1, \cdots, b+1 \end{cases} \tag{16}$$

式中, $\Delta t = t_f - t_0$, $\Delta v_{\max}$ 表示最大脉冲限制。

初值可取为 $\boldsymbol{Y}_0 = \left[\Delta t / b \quad \cdots \quad \Delta t / b\right]^{\mathrm{T}}$, 即导航点位置在最优轨线上等时间间隔分布, 脉冲等间隔。目标函数 $F(\boldsymbol{Y})$ 高度非线性, 既有线性等式约束, 又有非线性不等式约束, 可采用二次规划算法求解。

4 仿真算例

假设参考航天器位于 450km 圆轨道; 追踪航天器的脉冲上限约束 $\Delta v_{\max} = 1.0\mathrm{m/s}$; $t_0 = 0$ 时, $\boldsymbol{r}_0 =$

$[-500 \quad -2000 \quad 0]^T$、$\boldsymbol{v}_0=[-0.2 \quad -0.4 \quad 0]^T$; 任务要求追踪航天器在 $t_f=2000$s 时达到期望的状态 $\boldsymbol{r}_f=[0 \quad -200 \quad 0]^T$、$\boldsymbol{v}_f=[0 \quad 0 \quad 0]^T$。最优轨线 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 对应的 $\Delta V=3.1239$m/s。由于二脉冲($\Delta v_1=1.4882$m/s、$\Delta v_2=0.5980$m/s)不满足脉冲约束,所以采用多脉冲轨迹优化模型生成轨迹。

不考虑脉冲约束,对不同的脉冲次数,分别计算优化模型的初值,分析 *RSS*、ΔV 随脉冲次数 N 的变化关系,如图1所示。图中曲线表明: N 越大,ΔV 越大,而 *RSS* 越小。由此可见,最优轨线对应的速度增量消耗 ΔV 最大,其最优性体现在 *RSS* 最小时。

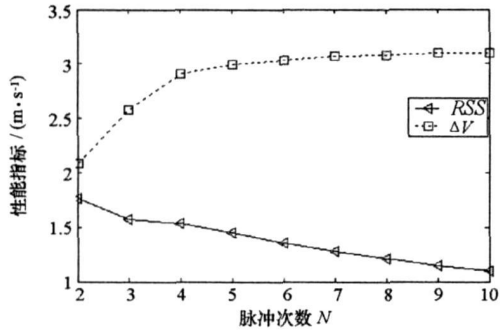


图1 *RSS*、ΔV 随 N 的变化

Fig. 1 *RSS* vs. N and ΔV vs. N

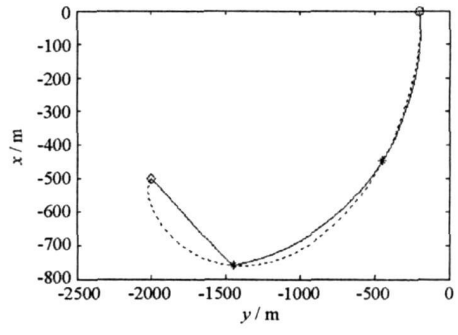


图2 优化的生成轨迹

Fig. 2 Optimal trajectory generation

考虑脉冲约束,取 $N=4$,利用 Matlab 中的"fmincon"函数对式(16)进行优化,优化的决策变量值为 $\boldsymbol{Y}^*=[684.37 \quad 629.89 \quad 685.74 \quad 638.56 \quad 708.46 \quad 652.98]^T$,所生成的轨迹如图2所示。图中"*"表示自由导航点,其位置坐标分别为$[-760.1 \quad -1452.7 \quad 0.0]^T$、$[-447.4 \quad -446.7 \quad 0.0]^T$。

初值对应 $RSS_0=1.533$m/s, $\Delta V_0=2.911$m/s; 生成轨迹对应 $RSS^*=1.466$m/s, $\Delta V^*=2.633$m/s。从上述数据可以看出,在优化 *RSS* 的同时,也对 ΔV 作了一定程度的优化。

仿真算例表明: 对固定时间状态转移,所提出的轨迹生成策略可以有效解决脉冲约束下的多脉冲轨迹优化生成问题。

5 结论

针对圆(近圆)轨道航天器的相对运动,研究了固定时间状态转移的优化轨迹生成问题。利用最优控制原理给出了基于连续推力的最优转移轨线。考虑到在工程上难以实现连续推力控制,提出了基于导航点的多脉冲轨迹生成策略。通过将导航点限定在最优转移轨线上,确定了导航点的位置参数(脉冲机动位置);利用导航点参数对轨迹参数化,以所有脉冲平方和的平方根最小为优化指标,建立了脉冲约束下的基于多脉冲的优化轨迹生成模型,应用二次规划算法对模型进行了成功求解。仿真算例表明了算法的有效性。本文所提出的轨迹生成模型考虑了工程实现,为编队飞行和空间交会的近距离相对运动的轨迹生成提供了一种新的策略。

参考文献:

[1] Yang I H, Zhao Y J. Real-time Trajectory Planning for Autonomous Aerospace Vehicles amidst Static Obstacles [C]// AIAA's 1st Technical Conference and Workshop on Unmanned Aerospace Vehicles, Portsmouth, Virginia, 2002.

[2] Sultan C, Seereeram S, Mehra R K. Minimization and Equalization of Energy for Formation Flying Reconfiguration [C]// IEEE International Conference on Robotics & Automation, New Orleans, LA, 2004.

[3] Sultan C, Seereeram S, Mehra R K. Matrix Inequalities and Energy Optimal Reconfiguration for Formation Flying Spacecraft [C]// AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Providence, Rhode Island, 2004.

[4] Sultan C, Seereeram S, Mehra R K. Energy Optimal Multi-spacecraft Relative Reconfiguration of Deep Space Formation Flying [C]// 43rd IEEE Conference on Decision and Control, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, 2004.

[5] Bryson A E, Ho Y C. Applied Optimal Control [M]. Hemisphere Publishing Company, 1975.

[6] D'Souza C N. An Optimal Guidance Law for Formation Flying and Stationkeeping [C]// AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Monterey, California, 2002.

[7] Straight S D. Maneuver Design for Fast Satellite Circumnavigation [D]. MS Thesis, Astronautical Engineering, Air Force Institute of Technology, AFIT/GA/ENY/04-M05, 2004.